求解圆锥曲线离心率的思维方法

□ 岳阳县第三中学 欧阳威

圆锥曲线离心率的计算题一般分为求值与求范围，从建立方程或不等式的思维上看，一般分为代数思维与几何思维。在计算技巧上，还有整体法的运用。具体分析如下：

一、圆锥曲线离心率求值的有关计算

题型一：通过求基本量a，c，再求离心率e。

例1：若椭圆C方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，求椭圆的离心率$e$。

解：依题意可得：$a^2=4\Rightarrow a=2$，$c^2=a^2-b^2=1\Rightarrow c=1$

$$\therefore\ e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

解析：这道题的解题思路是依椭圆的标准方程求出基本量a，c，从而求出离心率e的值。

题型二：整体法：将$\frac{c}{a}$看成一个整体，只须求出其值。

例2：（2013年湖南卷）在平面直角坐标系中，设F_1，F_2为双曲线C的$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$a>0$）左右焦点，若在$C$上存在一点$P$，使$PF_1\perp PF_2$，且$\angle PF_1F_2=30°$，则$C$的离心率为多少？

解：作出满足题意的图象，并可得点P在双曲线的右支上，

$$|F_1F_2|=2c，|PF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c,$$

在$Rt\Delta F_1PF_2$中，$\therefore|PF_1|=\sqrt{3}c$

又$|PF_1|-|PF_2|=2a$

$$\therefore\sqrt{3}c-c=2a\ \therefore e=\sqrt{3}+1$$

解析：这道题的解题思路是将双曲线的定义与直角三角形的几何性质相结合，建立关于a，c的同次方程。从计算技巧上看，利用了整体思想，即将$\frac{c}{a}$看成整体进行解答。

二、圆锥曲线离心率范围的有关计算

例3：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$F_1$，$F_2$，直线$x=\frac{a^2}{c}$、$x=-\frac{a^2}{c}$与$x$轴的交点分别为$M$，$N$，若$|MN|\leqslant2|F_1F_2|$，则该椭圆离心率的取值范围是什么？

解：依题意得：$|MN|=\frac{2a^2}{c}$，$|F_1F_2|=2c$，又$\because|MN|\leqslant2|F_1F_2|$

$$\therefore\frac{2a^2}{c}\leqslant4c\ \therefore e^2\geqslant\frac{1}{2}\ \therefore e\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\ \therefore\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1$$

解析：这道题的解题思路是利用已知条件中的不等关系，建立不等式，将$\frac{c}{a}$看成整体解出其范围。

例4：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的两个焦点是$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，M是椭圆上一点，且$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，求离心率e的取值范围。

解：设点M的坐标为（x，y），则$\overrightarrow{F_1M}=(x+c,y)$，$\overrightarrow{F_2M}=(x-c,y)$

由$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，得$x^2-c^2+y^2=0$，即$x^2-c^2=-y^2$。①

又由点M在椭圆上，得$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$，代入①，得$x^2-c^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$，即$x^2=a^2-\frac{a^2b^2}{c^2}$

$\because0\leqslant x^2\leqslant a^2$，$\therefore0\leqslant a^2-\frac{a^2b^2}{c^2}\leqslant a^2$，即$0\leqslant\frac{a^2-c^2}{c^2}\leqslant1$，$0\leqslant\frac{1}{e^2}-1\leqslant1$，

解得，$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e\leqslant1$，又$\because0<e<1$

$\because\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e\leqslant1$。

解析：这道题的解题思路是利用已知代数条件，建立等式，解出有关代数值，然后结合图象分析其应满足的几何性质，从而建立有关不等式。