使用费马原理求解运动学极值问题

——类比思想在物理解题中的应用

□ 平江县颐华学校 邓超华

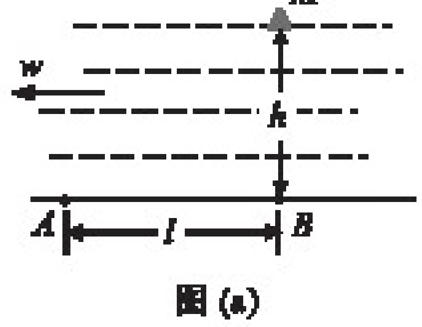
在几何光学中有一条重要的原理——费马原理，其内容是“光在两点之间总沿着所需时间为极值的路径传播”。“极值”可以是极大值、极小值，还可以是恒定值。由费马原理可导出光在两种介质分界面上的折射定律。设介质1和介质2的折射率分别为n_1及n_2，光在两种介质内的传播速度分别为v_1、v_2，则光在两种介质的分界面上发生折射时，入射角与折射角满足

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}$$

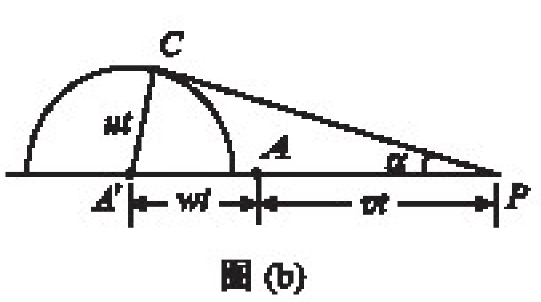
现在考虑下述场景，物体在不同区域（如沙漠、湿地等）运动时，其速度受到区域的影响而发生变化，需要求解从一个区域的指定位置到达另一区域指定位置的最短时间。通常的思路是设置一条具有一般性的路径，写出时间表达式，然后求极值。由于路径的不确定性，得到的时间是二元函数，极值的求解也甚为麻烦。

对于此类问题，可以做如下类比：物体速度受区域影响而发生改变，可以类比光速受到介质影响所发生的变化，因而费马原理同样适用。当物体在两个区域的运动线路满足“折射定律”时，运动时间取极值。下面试举一例。

例：如图(a)所示，河水流速为w，流向与河岸平行，河中有一小岛M，它与河岸的相对位置由图给出。河岸上A点有一小孩，欲前往河中小岛。小孩沿河岸奔跑的速度为v，在水中游泳的速度是u（相对于水），且u<w。问：为能在最短时间内到达小岛，小孩下水的位置应在何处？



图(a)

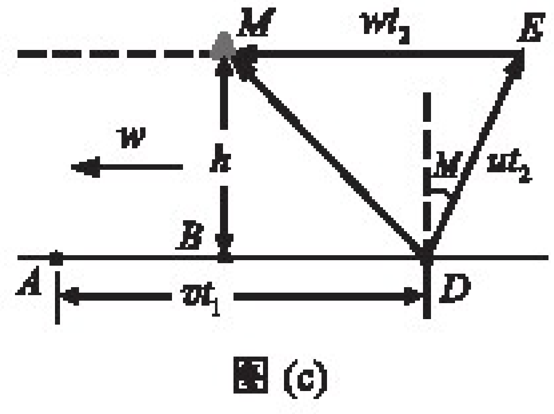


图(b)

解：因小孩游泳的速度u小于水速w，小孩不能在图示AB段下水，否则无论如何都到不了小岛M。小孩下水的位置应当在B点右侧。下面考虑在给定时间t内，小孩可能到达的区域。若水速为零，该区域的边界线为直线，其与河岸的倾角满足$\sin\alpha=u/v$。若水速不为零，应对上式进行修正。如图(b)，小孩从A点直接下水可能到达的区域是半径为ut的半圆A'，与静水情形相比，其圆心由A点向左侧平移了wt。小孩从河岸任意位置下水，在水中的运动区域相对静水都向左侧发生了平移。若小孩一直沿岸奔跑，在时间t内可到达P点，$AP=vt$。从P点向圆O引切线PC，PC即为小孩可能到达区域的边界。

$$\sin\alpha=\frac{u}{w+v} \quad ①$$

其倾角满足式①要求 $\frac{u}{w+v}\leq 1$ ，由题设$u<w$，此条件显然得到满足。



图(c)

欲使得小孩以最短时间上岛，小孩下水后，相对静水的速度u应与边界线PC垂直。因此作出小孩最佳上岛路线$A\to D\to M$，如图(c)所示。设小孩在岸上跑动时间为t_1，在水中游泳时间为t_2，小孩在水中的位移为

$$DM=DE+EM$$

（下转37页）

（上接13页）

其中DE是相对水的位移，其方向与岸的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ ，且$DE=ut_2$；EM是水的牵连位移，$EM=wt_2$；AD是小孩在岸上跑动的距离，$AD=vt_1$。由图示几何关系有

$$ut_2\cos\alpha=h \quad ②$$

$$vt_1+ut_2\sin\alpha-wt_2=l \quad ③$$

联立①②③可解得

$$t_1=\frac{l}{v}+\frac{(w-u\sin\alpha)h}{vu\cos\alpha}=\frac{l}{v}+\frac{h(w^2+wu-u^2)}{vu\sqrt{(w+u)^2-u^2}}$$

小孩下水位置与出发点距离为

$$AD=vt_1=l+\frac{h(w^2+wu-u^2)}{u\sqrt{(w+u)^2-u^2}}$$

此外，①式还可以按下述方法得到，沿用前面的设定，小孩从B点右侧的位置D下水，入水后游泳方向与垂直河岸成α角，于是得到②③两式。小孩到达小岛所需的时间为

$$t=t_1+t_2=\frac{l}{v}+\frac{(w-u\sin\alpha)h}{vu\cos\alpha}+\frac{h}{u\cos\alpha}$$

$$=\frac{l}{v}+\frac{(w+v-u\sin\alpha)h}{vu\cos\alpha}$$

上式对α求导

$$\frac{dt}{d\alpha}=\frac{h}{vu}\frac{-u\cos^2\alpha+(w+v-u\sin\alpha)\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{h}{vu}\frac{-u+(w+v)\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

由 $\dfrac{dt}{d\alpha}=0$ 得驻点

$$\sin\alpha_0=\frac{u}{w+v}$$

因$\alpha>\alpha_0$，$\dfrac{dt}{d\alpha}>0$，$\alpha<\alpha_0$，$\dfrac{dt}{d\alpha}<0$，可知在α_0处，t取极小值。使用类比思想将物体运动速度受区域的影响类比为介质对光速的影响，使得问题迎刃而解。